Développement dyadique.

Soit (ε_k) v.a. indépendantes à valeurs dans $\{0,1\}$.

Prop : $S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_k}{2^k} \sim \mathcal{U}[0,1] \iff \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \varepsilon_k \sim b(1/2)$.

$\Rightarrow$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \{0,1\}^n$.

$$\mathbb{P}(\varepsilon_1 = x_1, \dots, \varepsilon_n = x_n) = \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{2^k} \leq S \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{2^k} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}.$$

$= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\varepsilon_i = x_i)$ par indépendance. car $S \sim \mathcal{U}[0,1]$

Montrons par récurrence : $\forall i \in \{1, \dots, n\},\ \mathbb{P}(\varepsilon_i = x_i) = 1/2$.

* Clair pour $n = 1$.
* Si vrai pour $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathbb{P}(\varepsilon_{n+1} = x_{n+1}) = \frac{1}{2^{n+1}}\left(\prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\varepsilon_i = x_i)\right)^{-1} = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$.

Donc par récurrence, $\forall i \in \{1, \dots, n\},\ \mathbb{P}(\varepsilon_i = x_i) = 1/2$, puis $\forall k \in \mathbb{N},\ \varepsilon_k \sim b(1/2)$.

$\Leftarrow$ Posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{2^k}$, $\phi_n(t) = \mathbb{E}(e^{itS_n})$. Puisque $S_n \to S$, $\phi_n \to \phi_S$.

Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\phi_n(t) = \mathbb{E}\left(e^{it\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k/2^k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(e^{it\varepsilon_k/2^k}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{it/2^k}\right)$$

$$= \frac{1}{2^n}\prod_{k=1}^{n} e^{it/2^{k+1}}\left(e^{-it/2^{k+1}} + e^{it/2^{k+1}}\right) = \exp\left(\frac{it}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\right)\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{t}{2^{k+1}}\right)$$

Or $\sin\frac{t}{2} = 2\cos t/4 \sin t/4 = \dots = 2^n\left(\cos t/4 \cdots \cos t/2^{n+1}\right)\sin t/2^{n+1}$

Donc * si $t \in 2^{n+1}\pi\mathbb{Z}$, alors $\phi_n(t) = \mathbb{E}(e^{itS_n}) = 1$ car $tS_n \in 2\pi\mathbb{Z}$.

* sinon, $\prod_{k=1}^{n}\cos t/2^{k+1} = \frac{\sin t/2}{2^n \sin t/2^{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2\sin t/2}{t}$

lorsque $n \to +\infty$, $\phi_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\exp\left(\frac{it}{2}\right)\frac{\sin t/2}{t} = \frac{e^{it} - 1}{it}$.

$\phi_U(t) = \mathbb{E}(e^{itU}) = \int_0^1 e^{itx}\,dx = \frac{e^{it} - 1}{it}$ si $U \sim \mathcal{U}[0,1]$. Donc $\phi_U = \phi_S$.

La fonction caractéristique caractérise la loi.